

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**

**ETAPA LOCALĂ , CLASA a VIII - a**

**25 FEBRUARIE 2023**

1) Fie patru puncte necoplanare  $A, B, C, D$  astfel încât planele  $(ABC)$  și  $(BAD)$  sunt perpendiculare și  $BC = AC$ . Dacă  $M$  este mijlocul segmentului  $[AD]$  și  $CM = BD$ , determinați măsura unghiului dreptelor  $CM$  și  $BD$ . (S.G.M.)

2) a) Numerele reale  $a, b$  și  $c$  verifică relația  $a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 2a - 12b - 12c = 11$ .  
Demonstrați că  $a + b + c \in \left[-6, \frac{37}{3}\right]$ .

b) Considerăm numerele iraționale  $m, n, p, q$  din intervalul  $[0, 1]$ . Demonstrați că printre aceste numere există două cu distanța dintre ele mai mică decât  $\frac{1}{3}$ .

3) a) Să se arate că oricare ar fi  $a$  și  $b$  numere reale pozitive are loc relația  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ .

b) Demonstrați că  $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}} > 6$

c) Fie  $b \in \mathbb{R}$  astfel încât  $b = a^2 + a + 1$ , pentru orice  $a \in \mathbb{R}$ . Arătați că  $b \geq \frac{3}{4}$

4) În cubul  $ABCDEFGH$  notăm cu  $P$  centrul pătratului  $BCGF$ . Dacă  $M$  este mijlocul muchiei  $AB$  și  $N$  piciorul perpendicularei dusă din  $D$  pe  $CM$ , aflați măsura unghiului  $\sphericalangle CNP$ .

*Notă: Fiecare subiect este notat cu 7p.*

*Timp de lucru 3 ore*